Gewöhnliche Differentialgleichung: NWI
-Sophiane Yahiatene-

Aufgabe 7.1 Sei $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y \mapsto y$ ein Vektorfeld und

$$u_{i+1} = u_i + \frac{h}{6}\big(X(u_i) + 4X(\frac{u_i + u_{i+1}}{2}) + X(u_{i+1})\big)$$

der Iterationsschritt im Simpsonschen Verfahren.
Behauptung: Zeige, dass für dieses Vektorfeld die Simpson-Iteration und das Trapezverfahren identisch sind.

Beweis. Sei $h \neq 2$.

1. Simpsonverfahren:

$$\begin{aligned} u_{i+1} &= u_i + \frac{h}{6}\big(X(u_i) + 4X(\frac{u_i + u_{i+1}}{2}) + X(u_{i+1})\big) \\ &= u_i + \frac{h}{6}(3u_i + 3u_{i+1}) \\ &= \big(1 + \frac{h}{2}\big)u_i + \frac{h}{2}u_{i+1} \\ \Leftrightarrow u_{i+1} &= \frac{1+\frac{h}{2}}{1-\frac{h}{2}}u_i = \big(\frac{1+\frac{h}{2}}{1-\frac{h}{2}}\big)^{i+1}u_0 \end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit prüft man leicht mit vollständiger Induktion nach.

2. Trapezverfahren:

$$\begin{aligned} u_{i+1} &= h\big(\frac{X(u_i) + X(u_{i+1})}{2}\big) + u_i \\ \Leftrightarrow u_{i+1} &= \frac{1+\frac{h}{2}}{1-\frac{h}{2}}u_i = \big(\frac{1+\frac{h}{2}}{1-\frac{h}{2}}\big)^{i+1}u_0 \end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit prüft man leicht mit vollständiger Induktion nach.

□

Aufgabe 7.2 Sei $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y \mapsto y$ ein Vektorfeld und $u_0 = 1$ ein Startwert.
Der Iterationsschritt im klassischen Runge-Kutta-Verfahren lautet:

$$\begin{aligned} u_{i+1} &= u_i + \frac{h}{6}\big(u_i(6 + 3h + h^2 + \frac{h^3}{4})\big) \\ &= \big(1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6} + \frac{h^4}{24}\big)u_i \\ &= \big(1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6} + \frac{h^4}{24}\big)^{i+1}u_0 \\ &= \big(1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6} + \frac{h^4}{24}\big)^{i+1} \end{aligned}$$

Konvergenzordnung:

Im folgenden werden zwei Abschätzungen benötigt.

(1) $x^i - y^i \leq i x^{i-1}(x-y)$ für $0 \leq y \leq x$

Beweis. Mittelwertsatz für die Funktion $f(t) = t^i$.

$$|f(x) - f(y)| = |x^i - y^i| \leq \max_{\xi \in [0,1]} |i(x + \xi(y-x))^{i-1}| \cdot |x-y| = i \cdot x^{i-1}(x-y)$$

□

(2) Für $\exp(x) = \sum_{k=0}^{N} \frac{x^k}{k!} + R_{N+1}(x)$, wobei $R_{N+1}(x)$ das Restglied für ein $N \in \mathbb{N}$ ist, gilt:

$$\big|R_{N+1}(x)\big| \leq 2\frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!} \text{ für alle } x \text{ mit } |x| \leq 1 + \frac{1}{2}N$$

Beweis. Für $|x| \leq 1 + \frac{1}{2}N$ gilt:

$$\begin{aligned}
|R_{N+1}(x)| &= \Big|\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\Big| \\
&\leq \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{|x|^k}{k!} \\
&= \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!}\Big(1 + \frac{|x|}{N+2} + \frac{|x|^2}{(N+2)(N+3)} + \frac{|x|^3}{(N+2)(N+3)(N+4)} + ...\Big) \\
&\leq \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!}\Big(1 + \frac{|x|}{N+2} + \Big(\frac{|x|}{(N+2)}\Big)^2 + \Big(\frac{|x|}{(N+2)}\Big)^3 + ...\Big) \\
&\leq \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!} \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\frac{1}{2}\Big)^k \\
&= 2\frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!}
\end{aligned}$$

□

Nun gilt für $\alpha = 1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6} + \frac{h^4}{24}$ und $T < \infty$ der Prognosehorizont:

$$\begin{aligned}
|\exp(ih) - u_i| &= |\exp(ih) - \alpha^i| = |(\exp(h))^i - \alpha^i| \\
&\leq i(\exp(h))^{i-1}(\exp(h) - \alpha) && (1) \\
&= i(\exp(h))^{i-1}(\sum_{k=0}^{5} \frac{h^k}{k!} + R_6(h) - \alpha) \\
&= i(\exp(h))^{i-1}(\frac{h^5}{5!} + R_6(h)) \\
&\leq i(\exp(h))^{i-1}(\frac{h^5}{5!} + 2\frac{h^6}{(6+1)!}) && (2) \\
&\leq i(\exp(h))^{i-1}(\frac{h^5}{5!} + 2\frac{h^5}{5!}) \\
&= 3 \cdot i(\exp(h))^{i-1}\frac{h^5}{5!} \\
&= \frac{3}{5!} ih(\exp(h))^{i-1}h^4 \\
&\leq \frac{3}{5!} T\exp(T)h^4 \\
&= C \cdot h^4
\end{aligned}$$

wobei $C = \frac{3}{5!}T\exp(T)$, $ih \leq T$ und $h < 1$.

Also hat das klassische Runge-Kutta-Verfahren mit dem Vektorfeld X Konvergenzordnung 4.

Aufgabe 7.3 Sei $X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld, das der Lipschitzbedingung

$$\|X(u) - X(v)\| \leq L \|u - v\| \;\; \forall u, v \in \mathbb{R}^n$$

genügt.
Behauptung: Falls $hL < 1$ ist, so hat die Funktion $f : v \mapsto u + hX(v)$ einen Fixpunkt für festes u und h.

Beweis. $(\mathbb{R}^n, d)$ mit $d(x, y) := \|x - y\|$, $x, y \in \mathbb{R}^n$ ist ein vollständiger metrischer Raum.
Die Abbildung f ist eine Kontraktion, denn es gilt:

$$\|f(x) - f(y)\| = \|hX(x) - hX(y)\| = h \|X(x) - X(y)\| \leq hL \|x - y\|.$$

Nach dem Banachschen Fixpunktssatz besitzt f genau einen Fixpunkt ξ mit $\lim_{n\to\infty} f^n(u) = \xi$. □

Aufgabe 7.4 Betrachte das Anfangswertproblem $y'(t) = -50t^2(y(t) - cos(t))$, $y(0) = 0$.
Im folgenden ist die Integralkurve mit Hilfe des Euler-, Heun- und dem klassischen Runge-Kutta Verfahren approximiert.

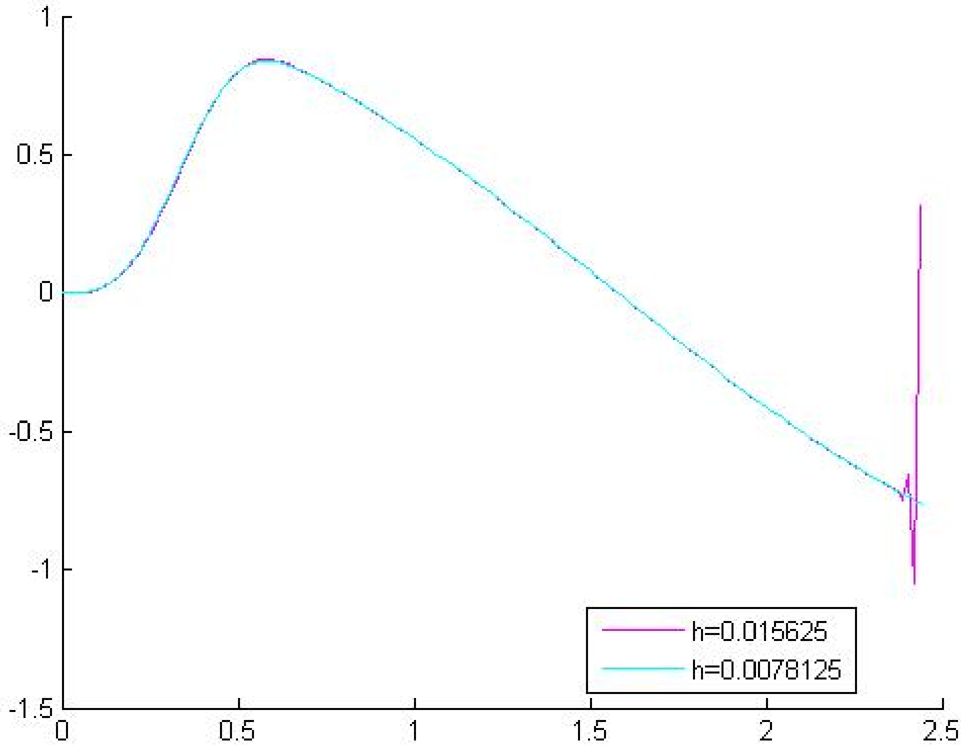

Abbildung 1: Eulerverfahren mit Schrittweite h

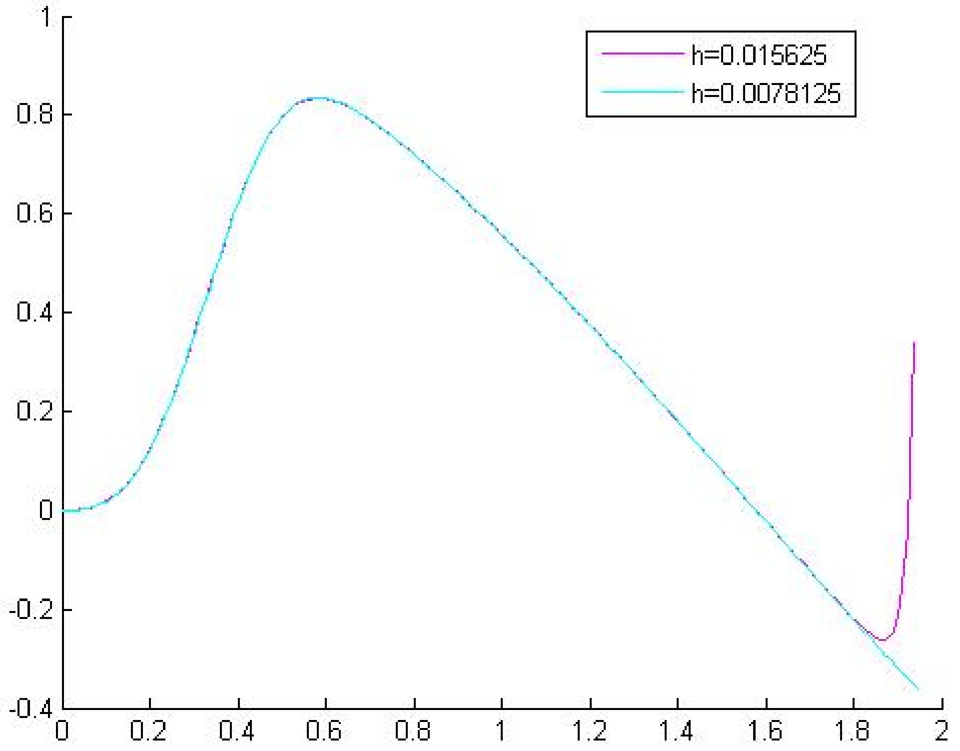

Abbildung 2: Heunverfahren mit Schrittweite h

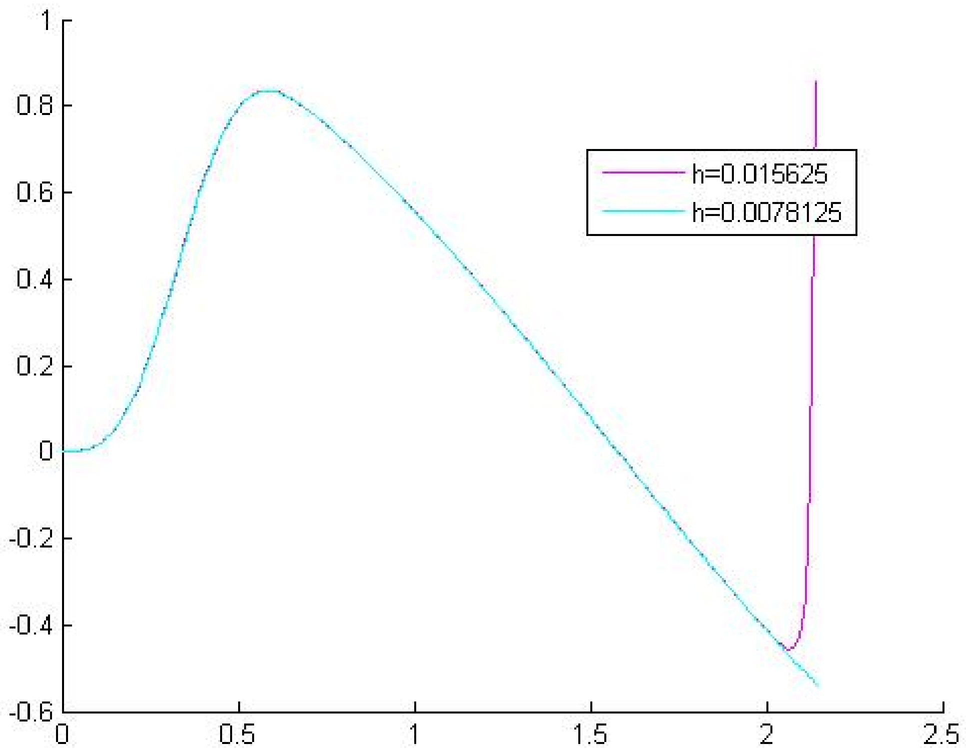

Abbildung 3: Klassische Runge-Kutta Verfahren mit Schrittweite h